CONCOURS ESIEE-AMIENS

Durée : 3 h

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants qui doivent être traités.

Problème I :

(n.b.: les parties 3 et 4 sont indépendantes entre elles)

Dans tout le problème, on considère la suite de polynômes $(B_n)_{n\in N}$ de variable réelle x définie par les relations :

$$\begin{cases} (\forall x \in R)\ \ B_0(x)=1 \\ (\forall n \in N^*)(\forall x \in R)\ \ B_n'(x)=nB_{n-1}(x) \\ (\forall n \in N^*)\ \ \int_0^1 B_n(x)dx=0 \end{cases}$$

On pose également, pour tout entier naturel n :

$$b_n = B_n(0)$$

Pour tout $n \in N$, on convient de noter $\tilde{B}_n$ l'application de R dans R, de période 1, qui coïncide avec B_n sur $]0;1[$ et telle que $\tilde{B}_n(0)=\frac{1}{2}(B_n(0)+B_n(1))$.

Partie 1 :

1°) Calculer $B_1(x)$ et $B_2(x)$. Quel est le degré de B_n ?

2°) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$: $B_n(0)=B_n(1)$

3°) **a)** Etablir que : $(\forall n \in N^*)\ (\forall x \in R)$

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} x^k$$

où C_n^k désigne $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$b_{n-1}=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k b_k$$

et calculer b_i pour $i \in \{2,3,4,5,6\}$.

4°) **a)** Montrer que : $(\forall n \in N)\ (\forall x \in R)$

$$B_n(1-x)=(-1)^n B_n(x)$$

b) En déduire que : $(\forall m \in N^*)$

$$b_{2m+1}=0$$

Partie 2 : 1°) Soit f une application de classe C^n $(n \geq 2)$ sur $[0;1]$.

a) Prouver que :

$$\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)=\int_0^1 f(x)dx+\frac{b_2}{2}\left(f'(1)-f'(0)\right)-\frac{1}{2}\int_0^1 B_2(x)f''(x)dx$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)=\int_0^1 f(x)dx+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{b_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(1)-f^{(k-1)}(0)\right)+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1 B_n(x)f^{(n)}(x)dx$$

2°) Soit f une application de classe C^{2p} $(p \geq 1)$ sur $[\alpha;\beta]$ $(\alpha,\beta \in Z, \alpha < \beta)$. Montrer que :

$$\frac{1}{2}f(\alpha)+f(\alpha+1)+\ldots+f(\beta-1)+\frac{1}{2}f(\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(\beta)-f^{(2k-1)}(\alpha)\right)-\int_\alpha^\beta\frac{\tilde{B}_{2p}(x)}{(2p)!}f^{(2p)}(x)dx$$

Partie 3 : Pour tout entier $n \in N^*$, on pose $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

1°) On définit, pour $n \in N^*$: $u_n=H_n-\ln n$

a) Montrer que $u_n-u_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$

b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$. On note γ sa limite.

2°) Soit $p \geq 2$ un entier fixé.

a) Pour $n \in N^*$, justifier l'existence de l'intégrale $\int_n^{+\infty}\frac{\tilde{B}_{2p}(x)}{x^{2p+1}}dx$. Montrer que $\varepsilon_p(n)$ défini pour tout entier $n \in N^*$ par $\varepsilon_p(n)=-\frac{b_{2p}}{2p}\frac{1}{n^{2p}}+\int_n^{+\infty}\frac{\tilde{B}_{2p}(x)}{x^{2p+1}}dx$ vérifie : $\varepsilon_p(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} n^{2p-1}\varepsilon_p(n)=0$.

b) A l'aide du résultat établi au 2°) de la partie 2, montrer que

$$H_n=\ln n+\gamma_p+\frac{1}{2n}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{b_{2k}}{2k}\frac{1}{n^{2k}}+\varepsilon_p(n)$$

où on a posé : $\gamma_p=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{p}\frac{b_{2k}}{2k}-\int_1^{+\infty}\frac{\tilde{B}_{2p}(x)}{x^{2p+1}}dx$

c) Montrer que, pour tout $p \in N^*$:

$$\gamma_p=\gamma$$

Partie 4 : 1°) Etablir que $\int_0^1 \tilde{B}_p(x)e^{-2\pi inx}dx=\frac{-p!}{(2\pi in)^p}$ pour $n \in Z^*$ et $\int_0^1 \tilde{B}_p(x)e^{-2\pi inx}dx=0$ pour $n=0$.

2°) En déduire le développement en série de Fourier de $\tilde{B}_p(x)$ pour $p \geq 2$.

3°) En déduire que $(\forall k \in N^*)(\forall x \in R)$

$$\frac{\tilde{B}_{2k}(x)}{(2k)!}=2(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2\pi nx)}{(2n\pi)^{2k}}$$

4°) Utiliser les résultats précédents pour donner la valeur de $\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ $(k \in N^*)$ en fonction de b_k.

Calculer explicitement $\zeta(2),\zeta(4),\zeta(6)$.

Problème II :

On rappelle que :
1) Dans l'espace vectoriel R^n $(n \in N^*)$, l'application qui à tout $X \in R^n$, $X = (x_1, x_2, .., x_n)$, associe le réel $\|X\| = \max_{i=1,..,n} |x_i|$ définit une norme sur R^n.

2) On dit qu'une suite de vecteurs $\left(X^{(k)}\right)_{k \in N}$ de R^n converge vers un vecteur $\Lambda \in R^n$ si et seulement si :

$$\lim_{k \to +\infty} \|X^{(k)} - \Lambda\| = 0$$

3) Dans l'espace vectoriel $M_n(R)$ des matrices carrées d'ordre n $(n \in N^*)$ à coefficients réels, l'application qui, à toute matrice $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ associe le réel $\|A\| = \max_{i=1,..,n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ définit une norme sur $M_n(R)$.

question préliminaire :
Montrer que : $(\forall M \in M_n(R))(\forall X \in R^n)$

$$\|M.X\| \le \|M\| . \|X\|$$

Dans toute la suite, $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ désigne une matrice de $M_n(R)$ à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire vérifiant : $(\forall i \in \{1,2,..,n\})$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|$$

On désigne par D, E, F les matrices de $M_n(R)$ définies par :

$D = [d_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ où $d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ si $i \ne j$

$E = [e_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ où $e_{ij} = -a_{ij}$ si $i > j$ et $e_{ij} = 0$ si $i \le j$

$F = [f_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ où $f_{ij} = -a_{ij}$ si $i \le j$ et $f_{ij} = 0$ si $i \ge j$

de sorte qu'on a :

$$A = D - E - F$$

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 :

1°) **a)** Justifier l'existence de la matrice J définie par : $J = D^{-1}(E + F)$

b) Montrer que $\|J\| < 1$

2°) **a)** Soit $Y \in R^n$. Etablir l'équivalence : $(AY = 0) \Leftrightarrow (Y = JY)$

b) En déduire que A est inversible.

3°) $B \in R^n$ désignant un vecteur fixé, on appelle Λ l'unique solution du système $AX = B$ d'inconnue $X \in R^n$.
On considère la suite de vecteurs $\left(X^{(k)}\right)_{k \in N}$ de R^n définie par

$$\begin{cases} X^{(0)} \in R^n \\ (\forall k \in N)\ X^{(k+1)} = J.X^{(k)} + D^{-1}B \end{cases}$$

a) Montrer que : $(\forall k \in N)\ \ X^{(k+1)} - \Lambda = J\left(X^{(k)} - \Lambda\right)$

b) En conclure que la suite $\left(X^{(k)}\right)_{k\in N}$ converge vers Λ.

Partie 2 :

1°) Justifier l'existence de la matrice L définie par $L = (D - E)^{-1}F$

2°) Soit $X \in R^n$ et $Y = L.X$. On pose $X = (x_1, x_2, .., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, .., y_n)$

a) Montrer que : $\left(\forall i \in \{1,2,..,n\}\right)$

$$y_i = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

où la première somme (respectivement la deuxième somme) est égale à 0 si $i = 1$ (respectivement si $i = n$)

b) Vérifier que $|y_1| < \|X\|$

c) En déduire que $\|Y\| < \|X\|$

3°) On pose $L = \left[\alpha_{ij}\right]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$

a) Justifier qu'il existe $i_0 \in \{1,2,..,n\}$ tel que $\|L\| = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i_0 j}|$

b) On considère le vecteur $X_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ où $\left(\forall j \in \{1,2,..,n\}\right)$ $\begin{cases} \varepsilon_j = 1 \text{ si } \alpha_{i_0 j} \ge 0 \\ \varepsilon_j = -1 \text{ sinon} \end{cases}$

Montrer que $\|L.X_0\| = \|L\|$

c) En déduire que $\|L\| < 1$

4°) $B \in R^n$ désignant un vecteur fixé, on appelle Λ l'unique solution du système $AX = B$ d'inconnue $X \in R^n$. On considère la suite de vecteurs $\left(Y^{(k)}\right)_{k\in N}$ de R^n définie par

$$\begin{cases} Y^{(0)} \in R^n \\ (\forall k \in N)\ Y^{(k+1)} = L.Y^{(k)} + (D - E)^{-1}B \end{cases}$$

a) Montrer que : $(\forall k \in N)\ \ Y^{(k+1)} - \Lambda = L\left(Y^{(k)} - \Lambda\right)$

b) En conclure que la suite $\left(Y^{(k)}\right)_{k\in N}$ converge vers Λ.